УДК 517.9

О СВОЙСТВАХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИВЕРГЕНТНОЙ СТРУКТУРЫ

©С. Д. Эйдельман

Доклад содержит результаты изучения положительных решений линейных уравнений и систем уравнений, полученные докладчиком совместно с В.А.Кондратьевым. Они дополняют информацию, изложенную в нашей статье [1]. Главное внимание сосредоточено на изучении решений систем дивергентной структуры, которые не рассматривались нами ранее.

Положительность решений $u(x) = (u_1(x), \ldots, u_N(x))$, $v(t,x) = (v_1(t,x), \ldots, v_N(t,x))$ мы всюду понимаем, как принадлежность области значений вектор-функций $u(x)$, $v(t,x)$ почти при всех значениях независимых переменных из областей их определения острому конусу K пространства C^N. На самом деле все получающиеся результаты могут формулироваться и как утверждения о свойствах решений при заданных свойствах их отрицательной части:

$$u^-(x) = \begin{cases} -u(x) & \text{при } u(x) \overline{\in} K, \\ u(x) & \text{при } u(x) \in K, \end{cases}$$

Мы не будем формулировать наиболее общие результаты, стремясь сделать изложение более доступным для понимания.

1. **Эллиптические системы.** Изложим исходный результат для слабых решений систем однородной структуры

$$\sum_{|k| \le m} \partial_x^k (a_k(x) u(x)) = 0 \tag{1}$$

в ограниченной области $G \subset R^n$. Предположения таковы:

α_1. $a_k(x)$ квадратные матрицы размера N, элементы которых определены в области $\overline{G}$ и являются комплекснозначными измеримыми ограниченными константой M функциями.

α_2. $a_k(x)$ с $|k| = m$ непрерывные в $\overline{G}$ функции /в случае $N = 1$ условие α_2 излишне/.

Система (1) равномерно эллиптическая в области $\overline{G}$, т.е. существует положительная постоянная δ такая, что

$$|\det \Big(\sum_{|k|=m} a_k(x) \sigma^k \Big)| \ge \delta |\sigma|^{mN}, \ \forall \sigma \in R^n, \ \forall x \in \overline{G}.$$

β_1. $\Gamma_1 \equiv \partial G$ замкнутая гиперповерхность в R^n класса C^1.

β_2. Γ_1 принадлежит классу $C^{1,\lambda}$, $\lambda \in (0,1]$.

Обозначим через $\rho(x)$ положительную в G функцию, совпадающую в некоторой окрестности Γ_1 с расстоянием от x до Γ_1.

Введем пространство $L_s^1(G)$ вектор функций $w(x)$, локально интегрируемых в G, для которых конечна норма

$$\|\omega, G\|_s = \iint_G \rho(x)^s |w(x)| dx.$$

Рассмотрим через $\Gamma_1^{(\varepsilon)}$ ε-сдвиги поверхности Γ_1, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и L_1 - нормы

$$\langle u, \Gamma_1^{(\varepsilon)} \rangle = \int_{\Gamma_1^{(\varepsilon)}} |u(x)| \Gamma_1^{(\varepsilon)}.$$

Теорема 1. *1.1. Пусть выполнены условия α_1, α_2, β_1, $u(x)$ слабое положительное решение системы (1) в области G. Тогда при любом положительном a $u(x) \in L^1_{a-1}(G)$ и существует положительная постоянная C_1, зависящая только от n, m, N, M, δ модулей $\omega(z)$ непрерывности элементов матрицы $a_k(x)$ с $|k| = m$ и a такая, что*

$$\|u; G\|_{a-1} \leq C_1 \|u; G_1\|_0, \tag{2}$$

где G_1 -некоторая подобласть G, компактно в G вложенная, $G \subset\subset G_1$.

1.2. Пусть выполнены условия α_1, α_2, β_2, $u(x)$ слабое положительное решение системы (1) в G. Тогда $\langle u; \Gamma_1^{(\varepsilon)} \rangle$ конечны почти при всех значениях $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и существует положительная постоянная C_2, зависящая только от n, m, N, M, δ, $\omega(z)$, λ, ε_0 такая, что

$$\langle u; \Gamma_1^{(\varepsilon)} \rangle \leq C_2 \|u; G_1\|_0. \tag{3}$$

Доказательство теоремы 1 использует развитую нами технику построения специальных суб- и супер- решений и оценок L^1 - норм положительных решений. Заметим, что в областях G с липшицевыми границами положительные решения теряют свойства, изложенные в теореме 1 /так как в этот класс входят кусочно-гладкие границы, в окрестности которых положительные решения могут иметь любые степенные особенности/.

Отметим, что из неравенства (2) следует L^1 - неравенство Харнака

$$\|u; B_R\|_0 \leq C(R, R_1) \|u; B_{R_1}\|, \ \forall R_1 < R, \tag{4}$$

B_R -шар в R^n с центром в точке $x = 0$.

Из L_1 - неравенства Харнака непосредственно следует, например, что положительные в цилиндре функции растут не быстрее $\exp\{c|x|\}$, а в конусе, при специальных условиях на коэффициенты, - не быстрее степени.

Ограниченность в совокупности L^1-следов позволяет доказывать теоремы об обобщенном интегральном представлении положительных решений. Традиционными обьектами изучения являются классические решения эллиптических систем

$$\sum_{|k| \leq m} \tilde{a}_k(x) \partial_x^k u(x) = 0 \tag{5}$$

и решения из $W^b_{2,\mathrm{loc}}(G)$ систем дивергентной структуры

$$\sum_{\nu=0}^{b} \sum_{|\alpha|=|\beta|=\nu} \partial_x^\alpha (a_{\alpha\beta}(x) \partial_x^\beta u(x)) = 0. \tag{6}$$

Если коэффициенты системы (5) достаточно гладкие, то эта система может быть переписана в виде (1), ее положительные классические решения будут положительными слабыми решениями системы (1), обладающими свойствами, изложенными в теореме (1).

Однако нахождение по возможности точных условий на коэффициенты систем (5), (6), учитывающих структуру этих систем и естественные классы рассматриваемых решений является, на наш взгляд, важной задачей, особенно при применениях теории линейных уравнений при исследовании положительных решений квазилинейных уравнений и систем.

В дальнейшем используются условия:

α_3. Элементы матриц $\tilde{a}_k(x)/a_{\alpha\beta}(x)$ / непрерывны в $\overline{G}$ и их модули непрерывности $\omega(z)$ удовлетворяют условию Дини, т.е. $\Omega(d) = \int_0^d \{\omega(z)/z\}dz < +\infty$.

α_4. В области $G_{\varepsilon_0} = \overline{G} \cap \{\rho(x) \leq \varepsilon_0\}$ элементы матриц $\tilde{a}_k(x)/a_{\alpha\beta}(x)$ / удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\mu \in (0,1]$.

Используя аппарат фундаментальных решений эллиптических систем, условие Гельдера и технику получения L^1-оценок классических решений $u(x)$ /см. [1], с. 102-105/ и специальные пробные функции устанавливаются следующие утверждения.

Теорема 2. *Рассматриваются классические положительные решения $u(x)$ системы (5) в области G.*

2.1. Если выполнены условия α_1, α_3, β_1, то при любом положительном a конечна норма $\{u;G\}_{m,a-1} = \sum_{|j|\leq m} \iint_G \rho(x)^{|j|+a-1}|\partial_x^j u(x)|dx$ и существует поло-жительная постоянная C_3, зависящая только от $m, n, N, \delta, a, M, \omega(z)$, $\Omega(z)$, такая, что

$$\{u;G\}_{m,a-1} \leq C_3\|u;G_1\|_0, \quad G_1 \subset\subset G. \tag{7}$$

2.2. Если выполнены условия α_1, α_3, α_4, β_2, то следы $\langle u_j; \Gamma_1^{(\varepsilon)}\rangle$ ограничены в совокупности, т.е. существует положительная постоянная C_4, зависящая толь-ко от m, n, N, M, δ, λ, μ, ε_0, такая, что

$$\langle u, \Gamma_1^{(\varepsilon)}\rangle \leq C_4\|u;G_1\|_0, \quad G_1 \subset\subset G, \quad \varepsilon \in (o,\varepsilon_0] \tag{8}$$

Переходим к изучению положительных решений из $W^b_{2,\mathrm{loc}}(G)$ системы (6). На первом этапе рассматриваются классические решения системы

$$\sum_{\nu=0}^{b} \sum_{|\alpha|=|\beta|=\nu} \partial_x^\alpha(a^h_{\alpha\beta}(x)\partial_x^\beta u^h(x)) = 0, \tag{6_h}$$

где $a^h_{\alpha\beta}(x)$ усреднения коэффициентов $a_{\alpha\beta}(x)$ / все рассуждения проводятся в некоторой подобласти $G_0 \subset\subset G$ /. Предполагая, что выполнены условия α_1, α_3, β_1, устанавливается оценка

$$\{u^h;G_0\}_{b,a-1} \leq C_5(m,n,N,M,\delta,\Omega(z),a)\|u^h;\tilde{G}_0\|_0, \quad \tilde{G}_0 \subset\subset G_0. \tag{9}$$

Затем, используя коэрцитивную L^2-оценку решений задачи Дирихле для сильно эллиптических систем, устанавливается

Теорема 3. *Рассматриваются положительные решения $u(x)$ из $W^b_{2,\mathrm{loc}}(G)$ - решения сильно эллиптической системы (6).*

3.1. Если выполнены условия α_1, α_3, β_1, то при любом положительном a конечна норма $\{u;G\}_{b,a-1}$ и существует положительная постоянная C_5, зависящая только от m, n, N, M, a, δ_0 /постоянная сильной эллиптичности /, $\omega(z)$, $\Omega(z)$ такая, что

$$\{u;G\}_{b,a-1} \leq C_5\|u;G_0\|_0, \quad G_1 \subset\subset G. \tag{10}$$

3.2. Если выполнены условия α_1, α_3, α_4, β_2, то следы $\langle u; \Gamma_1^{(\varepsilon)} \rangle$ существуют почти при всех значениях $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и существует положительная постоянная C_6, зависящая только от m, n, N, M, δ_0, λ, μ, такая, что

$$\langle u; \Gamma_1^{(\varepsilon)} \rangle \leq C_6 \|u; G_1\|_0, \quad G_1 \subset\subset G. \tag{11}$$

2. **Параболические системы.** Качественные свойства положительных решений параболических по Петровскому систем изучались нами в работах [1-6]. Рассматривались слабые решения из $L^1_{\mathrm{loc}}(Q)$ / Q область R^{n+1} / систем

$$\mathcal{L}_1 u \equiv -\partial_t u + \sum_{|k| \leq 2b} \partial_x^k (a_k(t,x) u(t,x)) = f(t,x) \tag{12}$$

и классические решения $u(t,x)$ систем обычной структуры

$$\mathcal{L}_2 u \equiv -\partial_t u + \sum_{|k| \leq 2b} \tilde{a}_k(t,x) \partial_x^k u(t,x) = \phi(t,x). \tag{13}$$

Предполагалось,что все рассматриваемые функции определены в области Q и удовлетворяют условиям:

α_5. $a_k(t,x), \tilde{a}(t,x), f(t,x), \phi(t,x)$ комплекснозначные матрицы-функции,

α_6. $a_k(t,x)$ измеримые ограниченные матрицы- функции,

α_7. $a_k(t,x)$ с $|k| = m$ равномерно непрерывны,

α_8. $\tilde{a}_k(t,x)$ равномерно непрерывные ограниченные матриц-функции и их модули непрерывности по x удовлетворяют условию Дини,

α_9. $f(t,x)$ комплекснозначная измеримая локально суммируемая вектор - функция,

α_{10}. $\phi(t,x)$ комплекснозначная непрерывная вектор-функция,

α_{11}. Системы (12), (13) равномерно параболические по И.Г.Петровскому

Исследованием не охватывались решения $u(t,x)$ из пространств $W^{1,b}_{2,t,x,\mathrm{loc}}(Q)$ систем дивергентного вида

$$\mathcal{L}_3 u \equiv -\partial_t u + \sum_{\nu=0}^{b} \sum_{|\alpha|=|\beta|=\nu} \partial_x^\alpha (a_{\alpha\beta}(t,x) \partial_x^\beta u(t,x)) = \Psi(t,x) \tag{14}$$

Настоящей работой начинается исследование положительных решений таких уравнений в случае $b > 1$. Дивергентные уравнения второго порядка, в частности их положительные решения, изучены с большой полнотой. Заметим, что если коэффициенты $a_k(t,x)$, $\tilde{a}_k(t,x)$, $a_{\alpha\beta}(t,x)$ достаточно гладкие, то параболическую систему можно записать в любой из перечисленных форм, а слабые решения из $L^1_{\mathrm{loc}}(Q)$ и $W^{1,b}_{2,t,x,\mathrm{loc}}(Q)$ будут классическими решениями и получение информации о решениях различной структуры вроде теряет смысл.

Подчеркнем, что во всех полученных нами результатах и оценках решений фигурируют только ограничения вида $\alpha_5 - \alpha_{11}$ / или им подобные /. Это важное для теории линейных систем обстоятельство становится решающим при изучении решений квазилинейных уравнений, являющихся главным обьектом наших дальнейших исследований.

Изучаются положительные в смысле принадлежности их области значений острому конусу $K \subset C^N$ и решения $u(t,x)$ из $W^{1,b}_{2t,x,\mathrm{loc}}(Q)$ однородной системы (14). Предполагаются выполненными условия:

α_{12}. Система (14) равномерно сильно параболическая, т.е. существует положительная постоянная δ_0 такая, что

$$\mathrm{Re} \sum_{|\alpha|=|\beta|=b} (-1)^b (a_{\alpha\beta}(t,x)\sigma^\alpha\sigma^\beta e, e) \le -\delta_0|\sigma|^{2b}|e|^2,$$

$$\forall (t,x) \in Q, \forall \sigma \in R^n, \forall e \in C^N$$

α_{13}. Коэффициенты $a_{\alpha\beta}(t,x)$ удовлетворяют условию α_8.

α_{14}. $b = 2q+1$. Через G обозначим ограниченную область R^n с гладкой границей Γ_1.

Через $Q_T = (0,T] \times G$ - цилиндр высоты $T > 0$ в пространстве R^{n+1}, через $S = \{\Gamma_1 \times (o,T]\} \cup \{G \times (t=0)\}$ параболическую границу Q_T, $\gamma = \Gamma_1 \times \{t=0\}$ ребро Q_T.

Введем пространство $L^1_s(Q_T)$ локально интегрируемых в Q_T функций $u(t,x)$, для которых конечна норма

$$\|u; Q_T\|_S = \iint_{Q_T} \phi_S(t,x)|u(t,x)|dtdx,$$

где $\phi_S(t,x)$- гладкая положительная ограниченная в Q_T функция, совпадающая в окрестности ребра γ с функцией $\rho(x)^s(t+\rho(x)^{2b})$, с $\rho(x)$- в окрестности боковой поверхности цилиндра $Q_T^{(\eta)} = Q_T \cap \{t \ge \eta\}$, $\eta > 0$.

Рассмотрим, наконец, множество $L^1_{s,b}(Q_T)$ функций, принадлежащих $W^{1,b}_{2,t,x,\mathrm{loc}}$ и таких, что конечна норма

$$\|u; Q_T\|_{s,b} = \sum_{|j|\le b} \iint_{Q_T} \phi_s(t,x) p^{|j|}(t,x)|\partial^j_x u(t,x)|dtdx,$$

где $p(t,x)$ функция, совпадающая в окрестности параболической границы S с параболическим расстоянием от точки (t,x) до S.

Для формулировки основного результата необходимо еще следующее рассуждение. Рассмотрим матрицу $P_0(t,x,\sigma) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=\nu} a_{\alpha\beta}(t,x)\sigma^\alpha\sigma^\beta$ - она равномерно эллиптическая. Наряду с матрицей $P_0(t,x,\sigma)$ рассмотрим семейство полиномиальных матриц

$$R^{(l)}_\nu(t,x;\xi) = \sum_{\mu=0}^{2b} \frac{1}{\mu!} \prod_{j=1}^{\mu-1} (1 - \frac{j}{l}) \partial^\mu_{\xi_n} P_0(t,x;\xi' + \xi_n\nu) |_{\xi_n=0} \xi^\mu_n$$

$\xi' = (\xi_1, ..., \xi_{n-1})$, l - некоторое число, большее $2b-1$, при $\mu = 0$ коэффициент при $P_0(\cdot,\cdot,\cdot)$ равен единице.

Заметим, что при достаточно большом l из равномерной эллиптичности матрицы $P_0(t,x;\sigma)$ следует l - квазиэллиптичность $R^{(l)}_\nu(t,x;\xi)$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия α_{12}, α_{13}, α_{14} в цилиндре $\overline{Q}_T$, система (14) l - квазиэллиптическая в точках ребра γ в направлении внутренней нормали ν_x к Γ_1 в точке x. При этом l одинаково во всех точках ребра.*

Тогда у любого положительного решения $u(t,x) \in W^{1,l}_{2t,x,\mathrm{loc}}(Q_T)$ однородной системы (14) конечна норма $\|u; Q_T\|_{l-2b,2b}$ и существуют положительные C, η, T_2, $T_2 > T_1$ такие, что

$$\|u; Q_{T_1}\|_{l-2b,b} \le C\|u_j Q^{(\eta)}_{T_2}\|_{0,0}, T_1 < T_2 < T.$$

1. *Кондратьев В.А., Эйдельман С.Д.*, Положительные решения линейных уравнений с частными производными // Труды Московск. мат. о-ва. - 1974. - **34**. - С. 85–146.
2. *Плетнева Т.Г., Эйдельман С.Д.*, Теоремы о трех цилиндрах для решений эволюционных квазиэллиптических уравнений // ДАН СССР. - 1970. - **192**. - *N 3*. - С. 507–510.
3. *Кондратьев В.А., Эйдельман С.Д.*, О свойствах решений линейных эволюционных систем с эллиптической пространственной частью // Матем. сб. - 1970. - **81**. - *N 3*. - С. 398–429.
4. *Кондратьев В.А., Плетнева Т.Г., Эйдельман С.Д.*, Положительные решения эволюционных квазиэллиптических уравнений // Матем. сб. - 1972. - **89**. - *N 1*. - С. 16–45.
5. *Плетнева Т.Г., Эйдельман С.Д.*, Положительные решения параболических систем и их интегральные представления // ДАН СССР. - 1973. - **208**. - *N 4*. - С. 787–790.
6. *Плетнева Т.Г., Эйдельман С.Д.*, Неравенства Харнака, интегральное представление, теорема Фату для классических положительных решений параболических уравнений с весом $2(2q+1)$ // Укр. мат. журнал. - 1978. - **30**. - *N 4*. - С. 498–505.